QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \tan x$ est la primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 de la fonction

☐ $x \mapsto 1+\tan^2 x$. ☐ $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$. ☐ $x \mapsto \sin^2 x$.

2. La primitive de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0 est la fonction

☐ $x \mapsto 1-\cos x$. ☐ $x \mapsto -\cos x$. ☐ $x \mapsto \cos x - 1$.

3. La primitive qui s'annule en 0 de la fonction $x \mapsto 1+\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est

☐ paire. ☐ impaire. ☐ ni paire ni impaire.

4. La primitive sur $]-1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}$, qui s'annule en 0 est

☐ $x \mapsto \frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{2}$. ☐ $x \mapsto \frac{1}{4(1-x)^4}-\frac{1}{4}$. ☐ $x \mapsto \frac{-1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{2}$.

5. La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\cos x$, qui prend la valeur 1 en 0 est

☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2}\sin x + 1$. ☐ $x \mapsto x\sin x + \cos x$. ☐ $x \mapsto \cos x - x\sin x$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction continue est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$x \mapsto \begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ et G est une primitive d'une fonction g sur $\mathbb{R}$ alors F.G est une primitive de f.g sur $\mathbb{R}$.

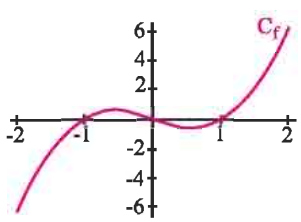
4. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto F(2x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

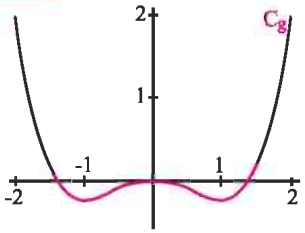
5. Si deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I coïncident en un réel x_0 de I alors elles sont égales.

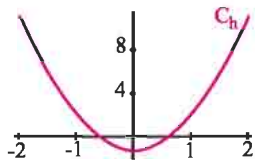
1 Déterminer les primitives F sur I de chacune des fonctions f ci-dessous.

1. $f : x \mapsto -5x^4 + 2x - 3$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x + 2 - \dfrac{3}{x^2}$, $I =]-\infty, 0[$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\left(3x^2+2\right)^2}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto (-x+3)^6$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto (x-1)\left(x^2-2x+7\right)^4$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-4x+3}}$, $I =]-\infty, \dfrac{3}{4}[$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$.
8. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\left(x^3+3x\right)^5}$, $I =]-\infty, -\sqrt{3}[$.
9. $f : x \mapsto \sin(2x+1)\cos^4(2x+1)$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f : x \mapsto x^2 \sin\left(x^3+1\right)$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{(\cos x + 1)^3}$, $I =]-\pi, \pi[$.
12. $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x-2}{x^4}$, $I =]-\infty, 0[$.
13. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$, $I =]1, +\infty[$.
14. $f : x \mapsto \tan^2 x$, $I =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

2 On a représenté ci-dessous les courbes de trois fonctions g , f et h, définies et dérivables sur $[-2,2]$.







1. On sait que f admet une primitive parmi les fonctions g et h sur $[-2,2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.
2. On sait que h admet une primitive parmi les fonctions f et g sur $[-2,2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.

3 Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions ci-dessous.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
2. $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x^2-6x}$, $I = [6, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$, $I =]1, +\infty[$.

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme

$a\sqrt{x-1} + \dfrac{b}{\sqrt{x-1}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).

5. $f : x \mapsto \left(x^2+x\right)^7\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{3+x}{2x}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
7. $f : x \mapsto x(x+1)^{2008}$, $I = \mathbb{R}$.

(On pourra vérifier que

$f(x) = (x+1)^{2009} - (x+1)^{2008}$).

4 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F vérifiant $F(x_0) = y_0$.

1. $f(x) = \tan x + \tan^3 x$, $I = [0, \dfrac{\pi}{2}[$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

2. $f(x)=\cos x-\cos^3 x$, $I=\mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

3. $f(x)=\sin x-\sin^3 x$, $I=\mathbb{R}$, $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$.

4. $f(x)=\frac{1+\tan x}{\cos^2 x}$, $I=[0,\frac{\pi}{2}[$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

5 1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos x.\cos(3x)$ et $g(x)=\sin x.\sin(3x)$.

a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f+g$ et $f-g$.

b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g.

2. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π de la fonction h définie par $h(x)=(1+\cos x)\sin(4x)$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\sin x$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f(x)=2\cos x-f''(x)$.

2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π.

7 Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2+2}{(x+1)^4}$.

On se propose de déterminer des réels a, b, c et d tels que pour tout x de $]-1,+\infty[$,

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{d}{(x+1)^4}.$$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4 f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)$.

b. En déduire que $d=3$ et $a=0$.

2. a. Vérifier que pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, $\frac{x-1-c}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}$.

b. En déduire les valeurs des réels b et c.

3. Déterminer la primitive de f sur $]-1,+\infty[$ égale 2 en 0.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)^3}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-2)^3}$.

2. En déduire une primitive de f sur $]-\infty,2[$.

9 On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Soit F la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=F(\sin x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $g(x)=x$.

3. Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10 On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Soit F la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $g(x)=F(\cos x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{\pi}{4}$.

3. Calculer $F(1)$ et $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

11 Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivable sur I telles que :

1. $f''(x)=0$, $I=\mathbb{R}$.

2. $f''(x)=\sin x$, $I=\mathbb{R}$.

12 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$.

a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 4.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=|x|+|x-1|$.

a. Montrer que g admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^3(x)+\sin^5(x)$.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

14 Un mobile sur un axe subit une accélération $a(t)$ dépendant du temps t (en secondes) tel que $a(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2}$, $t\in[0,10]$.

A l'instant $t=0$, le mobile est placé à l'origine de l'axe avec une vitesse nulle.

1. Déterminer l'expression de sa vitesse instantanée $v(t)$.

2. Déterminer sa vitesse et sa position pour $t=10$.

15 Soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

1. a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2,2]$.

b. Soit F la primitive de f sur $[-2,2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.

2. Soit G la fonction définie sur $[0,\pi]$, par $G(x)=F(2\cos x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a. Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de C.

b. Calculer $G'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0,\pi]$, $G(x)=\pi-2x+\sin(2x)$.

c. Calculer alors $F(1)$, $F(2)$ et $F(\sqrt{2})$.

16 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

1. Exprimer $\sqrt{x^2+1}$ à l'aide de $u(x)$ et $u'(x)$.

2. Déterminer des primitives pour chacune des fonctions ci-dessous.

$f:x\mapsto\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$.

$g:x\mapsto\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

17 Soit les fonctions $f:x\mapsto x\cos x$ et $g:x\mapsto x\sin x$.

1. En calculant $f'(x)+g(x)$, trouver une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

2. En procédant de même, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

18 Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$.

1. Déterminer la primitive F_n de P_n sur $\mathbb{R}$ égale à 1 en 0.

2. Déduire une autre expression de $P_n(x)$.

19 1. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $g(x)=x\sin x+\cos x-1$.

a. Etudier les variations de g sur $[0,\pi]$.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α appartenant à $]\frac{2\pi}{3},\pi[$.

Préciser le signe de $g(x)$.

2 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x} & \text{si } x\in]0,\pi],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b. Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.

c. Vérifier que $f(\alpha)=\sin\alpha$.

3. On donne $\alpha\simeq 2{,}34$ et $f(\alpha)\simeq 0{,}72$.

Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4. Déduire de ce qui précède que la restriction de f à $[\alpha,\pi]$ est une bijection de $[\alpha,\pi]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5. On pose $h(x)=g(x)-2\cos x$, $x\in[0,\pi]$.

Montrer que h admet des primitives sur $[0,\pi]$.

Donner la primitive H de h sur $[0,\pi]$ qui prend la valeur 1 en 0.

20 Pour tout réel x, on pose $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et on désigne par G la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que G est une fonction impaire.

2. a. On pose pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$\psi(x)=G(x)+G\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\Psi(x)=2G(1)$.

b. On pose $u(t)=G(\tan t), t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Calculer $u'(t)$ et en déduire $u(t)$.

3. Déterminer $G(1)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$.

4. Construire la courbe représentative de G dans un repère orthonormé.

21 Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[0,\sqrt{2}]$.

b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]0,\sqrt{2}[$ et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ par $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.

On note G la primitive de g sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ telle que $G(0)=0$.

a. Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto G(x)+G(-x)$. En déduire que G est impaire.

b. Montrer que pour tout x de $[0,\sqrt{2}[$, $G(x)=\pi-f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.

22 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que

$f(0)=1$, $f(1)=0$ et $f'(x)=\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $x\in]0,1[$.

1. Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

2. a. Montrer que pour tout x de $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $f(\cos x)=\dfrac{2}{\pi}x$.

b. En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0,1]$.

3. On pose pour tout x de $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $h(x)=f(\cos x)+f(\sin x)$.

a. Montrer que h est dérivable sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.

b. En déduire que pour tout x de $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $h(x)=1$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $\varphi_n(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)-x^n$, $x\in[0,1]$.

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $a_n\in]0,1[$ tel que $\varphi_n(a_n)=0$.

b. Montrer que pour tout x de $]0,1[$, si $n>p$ alors $\varphi_n(x)>\varphi_p(x)$.

c. En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.

Q.C.M :

1. $x \to 1+tg^2\,x$
2. $x \to 1-Cos\,x$
3. impaire
4. $x \to \frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{2}$
5. $x \to x\sin x+Cos\,x$

Vrai - Faux :

1. (Vrai)

En effet : cette primitive est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$

2. (VRAI)

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \sin x \succ 0 \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$$

F et dérivable sur $]0,+\infty[$

$$F'(x)=2x\sin(\frac{1}{x})+x^2(\frac{-1}{x^2}Cos\frac{1}{x})$$

$$F'(x)=2x\sin(\frac{1}{x})-Cos(\frac{1}{x})$$

$F'(x)=f(x)$ *pour* $x \succ 0$

Montrons que F est dérivable à droite en 0 *et*

$F_d'(0)=f(0)=0$

pour $x \succ 0$

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=x\sin(\frac{1}{x})$$

$$-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1 \Rightarrow$$

$$-x \le x\sin(\frac{1}{x}) \le x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x)=\lim_{x\to 0^+}(x)=0$$

d'ou

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=0=f(0)$$

Conclusion : F est une primitive de f

3. (FAUX)

Contre exemple :

$f(x)=1 \to F(x)=x$

$g(x)=x \to G(x)=\frac{1}{2}x^2$

$(F.G)(x)=\frac{1}{2}x^3$

$(F.G)'(x)=\frac{3}{2}x^2 \neq (f.g)(x)$

4. (FAUX)

$F(2x) \overset{\text{dérivée}}{\to} 2.f(2x)$

5. (VRAI)

Thérèse du cours :

Il existe une unique primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donnée.

EX 1 :

1. $f(x) = -5x^4 + 2x - 3$

$I = \mathbb{R}$

$F(x) = -x^5 + x^2 - 3 + k \; ; (k \in \mathbb{R})$

2. $f(x) = (x+2) - \frac{3}{x^2} \; ; I =]-\infty, 0[$

$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{3}{x} + k \; (k \in \mathbb{R})$

3. $f(x) = \frac{3x}{(3x^2+2)^2} \; ; I = \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{3x^2+2}\right) + k \; ; (k \in \mathbb{R})$

4. $f(x) = (-x+3)^6 \quad I = \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{-1}{7}(-x+3)^7 + k \quad (k \in \mathbb{R})$

5. $f(x) = (x-1).(x^2 - 2x + 7)^4 \; I = \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 2x + 7)^5 + k$

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$

$I = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[$

$F(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-4x+3} + k$

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.Cos(\sqrt{x}) \; ; I =]0, +\infty[$

$F(x) = 2\sin(\sqrt{x}) + k$

8. $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^3+3x)^5}$

$F(x) = \frac{-1}{12(x^3+3x)^4} + k$

9. $f(x) = \sin(2x+1).Cos^4(2x+1)$

$F(x) = \frac{-1}{10} Cos^5(2x+1) + k$

10. $f(x) = x^2.\sin(x^3+1)$

$F(x) = -\frac{1}{3} Cos(x^3+1) + k$

11. $f(x) = \frac{\sin x}{(1+Cos\, x)^3}$

$F(x) = +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+Cos\, x)^2}\right) + k$

12. $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^4}$

$F(x) = \frac{-3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + k$

$F(x) = \frac{2 - 6x - 9x^2}{3x^3} + k$

13. $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x}}$

$F(x) = 2\sqrt{x^2 - x} + k$

14. $f(x) = (1 + tg^2 x) - 1$

$F(x) = tgx - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$

Ex 2 :

1. *soit F une primitive de f sur* $[-2, 2]$

$F'(x) = f(x$

pour $x \in [-2, -1) \rightarrow f(x) \leq 0$

$x \in [-1, 0] \rightarrow f(x) \geq 0$

$x \in [0, 1] \rightarrow f(x) \leq 0$

$x \in [1, 2] \rightarrow f(x) \geq 0$

par exemple :

F est croissante sur $[-1, 0]$

or graphiquement :

h est decroissante sur $[-1, 0]$

d'ou h n'est pas une primitive de f

par suit : g est primitive de f

2. *soit H : une primitive de h*

$H'(x) = h(x); \forall x \in [-2, 2]$

graphiquement : $h(0) \neq 0$

$\Rightarrow H'(0) \neq 0$

$\Rightarrow (\varsigma_H)$ *n'admet pas une tgte horizentale au point d'assisse* 0

$\Rightarrow (\varsigma_H) \neq (\varsigma_g)$

d'ou f est une primitive de h sur $[-2, 2]$

EX 3 :

1. $f(x)=\sqrt{x+1}$

$F(x)=\frac{2}{3}(x+1).\sqrt{x+1}$

2. $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$

$F(x)=\frac{1}{3}(1+x^2).\sqrt{1+x^2}$

3. $f(x)=(x-3).\sqrt{x^2-6x}$

$F(x)=\frac{1}{3}(x^2-6x).\sqrt{x^2-6x}$

4. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\frac{(x-1)+2}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

d'où:

$F(x)=\frac{2}{3}(x-1).\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}$

$F(x)=(\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}).\sqrt{x-1}$

5. $f(x)=(x+\frac{1}{2}).(x^2+x)^7$

$F(x)=\frac{1}{16}(x^2+x)^8$

6. $f(x)=\frac{1}{x^2}.\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}$

$(\frac{3}{2x}+\frac{1}{2})'=\frac{-3}{2x^2}$

$f(x)=\frac{-2}{3}\left[\frac{-3}{2x^2}\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}\right]$

$F(x)=\frac{-2}{3}.(\frac{2}{3})(\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}).\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{-4}{9}(\frac{3+x}{2x})\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$

$F(x)=\frac{-2(3+x)}{9x}\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$

7. $f(x)=(x+1)^{2009}-(x+1)^{2008}$

$F(x)=\frac{1}{2010}(x+1)^{2010}-\frac{1}{2009}(x+1)^{2009}$

Ex 4 :

1. f(x)=tg x+tg^3 x

f est continue sur I= $[0,\frac{\pi}{2}[$ d'où f admet des primitives sur I

$f(x)=(1+tg^2x).tg\ x$

(de la forme U'.U)

D'où

$F(x)=\frac{1}{2}tg^2x+k$

$F(\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow\frac{1}{2}+k=1$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg^2\ x)$

2. f(x)=Cos(x)-Cos^3 (x)

f est continue sur I= IR

f admet donc des primitives sur I

f (x)=Cos x (1-Cos^2 x)

f (x)=Cos x . sin^2 (x)

d'où

$F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x+k$

$F(\frac{\pi}{2})=-1\Rightarrow-\frac{1}{3}+k=-1$

$\Rightarrow k=-\frac{2}{3}$

$F(x)=\frac{1}{3}(-2+\sin^3 x)$

3. f est continue sur I= $\mathbb{R}$ d'où f admet des primitives sur I

$f(x)=\sin x(1-\sin^2 x)$

$f(x)=\sin x.Cos^2 x$

$F(x)=\frac{-1}{3}Cos^3 x+k$

$f(\frac{-\pi}{4})=2\Rightarrow\frac{-1}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^3+k=2$

$\Rightarrow k=2+\frac{\sqrt{2}}{12}$

$F(x)=\frac{-1}{3}Cos^3 x+2+\frac{\sqrt{2}}{12}$

4. f est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

$f(x)=\frac{1}{Cos^2 x}(1+tg\ x)$

(de la forme U'.U)

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg\ x)^2+k$

$F(\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow k=-2$

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg\ x)^2-2$

EX 5 :

1. $f(x)=Cos(x).Cos(3x)$

$g(x)=\sin x.\sin(3x)$

a)

$*(f+g)(x)=Cos\ x.Cos\ 3x+\sin x\sin 3x$

$=Cos(3x-x)$

$=Cos\ 2x$

$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ *est une primitive de* $(f+g)$ *sur IR*

$*(f-g)(x)=Cos\ 4x$

$\psi(x)=\frac{1}{4}\sin 4x$

est une primitive de (f-g) sur IR

b).

$(\varphi+\psi)'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)$

$=(f+g)(x)+(f-g)(x)$

$=2f(x)$

$F(x)=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)(x)$ est une primitive de f sur IR

$F(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\sin(4x)+k\ \ k\in IR$

$(\varphi-\psi)'(x)=\big(f(x)+g(x)\big)-\big(f(x)-g(x)\big)$

$=2g(x)$

$G(x)=\frac{1}{2}(\varphi-\psi)(x)$

G est une primitive de g sur IR

$G(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{8}\sin(4x)+k\ \ k\in IR$

2.

$h(x)=\sin 4x+Cosx.\sin 4x$

$h(x)=\sin 4x+2Cosx.\sin 2x\ Cos2x$

$=\sin 4x+4\sin x.Cos^2 x\,(Cos\ 2x)$

$=\sin 4x+4\sin x.Cos^2 x\,(2Cos^2 x-1)$

$=\sin 4x+8\sin x.Cos^4 x-4\sin x\,Cos^2 x$

$H(x)=\frac{-1}{4}Cos\ 4x-\frac{8}{5}Cos^5 x+\frac{4}{3}Cos^3+k$

$H(\pi)=0\Rightarrow\frac{8}{5}-\frac{4}{3}+k=0$

$k=\frac{-4}{15}$

$H(x)=\frac{1}{4}Cos\ 4x-\frac{8}{5}Cos^5 x+\frac{4}{3}Cos^3 x-\frac{4}{15}$

EX 6 :

$f(x)=x.\sin x$

1. *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$

(*produit de 2 fonction dérivables*)

$f'(x)=\sin x+x\ Cos\ x$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f''(x)=Cos\ x+Cos\ x-x\sin x$

$f''(x)=2\ Cos\ x-f(x)$

$\Rightarrow f(x)=2\ Cos\ x-f''(x)$

2. $F(x)=+2\sin x-f'(x)+k$

$F(x)=2\sin-\sin x-x\ Cos\ x+k$

$F(x)=\sin x-x\ Cos\ x+k$

$F(\pi)=0\Rightarrow k=-\pi$

d'où :

$F(x)=\sin x-x\ Cos\ x-\pi$

EX 7 :

$f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^4}$

$f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{d}{(x+1)^4}$

1. *a)* $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4.f(x)=$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+2)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).f(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x^2}{x^4}$

$=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

b) $(x+1)^4.f(x)=$

$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^2f(x)=d$

or $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4f(x)=1$ *d'où* $d=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{d}{(x+1)^3})=a$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=0$

d'où $a=0$

$f(x)=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^4}$

2. *a)* $\dfrac{x+2}{(x+1)^4}=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^4}$

$\Rightarrow\dfrac{x+2}{(x+1)^4}-\dfrac{1}{(x+1)^4}=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{(x+1)^3}=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\dfrac{1-c}{(x+1)^3}=\dfrac{b}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{1-c}{(x+1)^3}=\dfrac{bx+b}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\begin{cases}b=0\\b=1-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=1\end{cases}$

d'où

$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^4}$

3. $F(x)=\dfrac{-1}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{3(x+1)^3}+k$

$F(0)=2\Rightarrow-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+k=0\Rightarrow k=\dfrac{5}{6}$

d'où

$F(x)=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{3(x+1)^3}$

EX 8 :

$f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-2)^3}\quad,x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

1. $f(x)=\dfrac{2(x-2)+5}{(x-2)^3}$

$f(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{5}{(x-2)^3}$

2. $F(x)=\dfrac{-2}{x-2}-\dfrac{5}{2(x-2)^2}$

$F(x)=\dfrac{-4x+3}{2(x-2)^2}$

EX 9 :

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\;;x\in]-1,1[$

F est dérivable sur $]-1,1[$

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$g(x)=F(\sin x)$

1. *la fonction* : $x \to \sin x$

est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-1,1\right[$

F *est dérivable sur* $\left]-1,1\right[$ *d'où* g *est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=Cos\,x.F'(\sin x)$

$=Cos\,x.f(\sin x)$

$=\frac{Cos\,x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{Cos\,x}{\sqrt{Cos^2 x}}$

$=\frac{Cos\,x}{|Cos\,x|}=1$ *car* $\frac{Cos\,x\succ 0}{x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$

$g'(x)=1\,;\forall x\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2. $g'(x)=1$

d'où $g(x)=x+k\,.\,k\in\mathbb{R}$

$g(0)=F(0)=0$

$\Rightarrow 0+k=0$

$\Rightarrow k=0$

d'ou $g(x)=x\;\; x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. $F(\frac{\sqrt{2}}{2})=F\left(\sin(\frac{\pi}{4})\right)=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{2})=F\left(\sin(\frac{\pi}{6})\right)=g(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}$

$F(-\frac{\sqrt{3}}{2})=F\left(\sin(-\frac{\pi}{3})\right)=g(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\pi}{3}$

EX 10 :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}\;\;:x\in[0,1]$

F *dérivable sur* $[0,1]$

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$g=F(Cos\,x)\,;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

1. g *est dérivable sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

comme était composée de deux fonction dérivable. (*voir ex* 9)

$g'(x)=(-\sin x).F'(Cos\,x)$

$=(-\sin x).f(Cos\,x)$

$=-\sin x\sqrt{1-Cos^2 x}$

$=-\sin x|\sin x|$

$=-\sin^2 x\qquad car\ \sin x\geq 0$

2. $g'(x)=-\sin^2 x=-\frac{1}{2}(1-Cos\,2x)$

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$g(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\frac{\pi}{4}$

d'où

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$

3. $F(1)=F(Cos0)=g(0)=\frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{\sqrt{2}})=F(Cos\,\frac{\pi}{4})=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

EX 11 :

1. $f''(x)=0\Rightarrow f'(x)=a\,;a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=a\,x+b\qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

2. $f''(x)=\sin x$

$\Rightarrow f'(x)=-Cos\,x+a;\;\; a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=-\sin x+a\,x+b$

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$

EX 12 :

1. $f(x)=|x| \quad x\in\mathbb{R}$

a) *f est continue sur* $\mathbb{R}$

b) $\begin{cases} f(x)=x & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ f(x)=-x & \text{si } x\in]-\infty,0[\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a & \text{pour } x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+b & \text{pour } x<0 \end{cases}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ *f continue en* 0

$\Rightarrow a=b$

$$\text{d'où} \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a & \text{pour } x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+a & \text{pour } x<0 \end{cases}$$

$F(4)=0 \Rightarrow 8+a=0 \Rightarrow a=-8$

$$\begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2-8 & \text{pour } x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2-8 & \text{pour } x<0 \end{cases}$$

2. $g(x)=|x|+|x-1|$

a) *g est continue sur IR*

x	-∞	0	1	+∞
|x|	-x	x	x	
|x-1|	-x+1	-x+1	x-1	
g(x)	-2x+1	1	2x-1	

$$\begin{cases} g(x)=-2x+1 & \text{pour } x\leq 0 \\ g(x)=1 & \text{pour } 0<x\leq 1 \\ g(x)=2x-1 & \text{pour } x>1 \end{cases}$$

d'où

$$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & \text{pour } x\leq 0 \\ x+b & \text{pour } 0<x\leq 1 \\ x^2-x+c & \text{pour } x>1 \end{cases}$$

G est continueen 0

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) \Rightarrow a=b$

G continue en $1 \Rightarrow$

$1+b=c \Rightarrow c=a+1$

d'où

$$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & \text{pour } x\leq 0 \\ x+a & \text{pour } 0<x\leq 1 \\ x^2-x+a+1 & \text{pour } x\geq 1 \end{cases}$$

$(a\in\mathbb{R})$

EX 13 :

$f(x)=\sin^3 x+\sin^5 x$

$=\sin x.(1-Cos^2 x)+\sin x.(1-Cos^2 x)^2$

$=\sin x-\sin x\,Cos^2 x+\sin x.(1+Cos^4 x-2Cos^2 x)$

$f(x)=2\sin x-3\sin x.\,Cos^2 x$

$\quad +\sin x.Cos^4 x$

$$F(x)=-2Cos\,x+Cos^3 x-\frac{1}{5}Cos^5 x$$

(on pourra aussi linéariser f(x))

EX 14 :

$$a(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2} \quad ; t\in[0,10]$$

1. $\begin{cases} v'(t)=a(t) \\ v(0)=0 \end{cases}$

$$v(t)=t+\frac{1}{t+1}+k$$

$v(0)=0 \Rightarrow 1+k=0 \Rightarrow k=-1$

$$v(t)=t-1+\frac{1}{t+1}$$

2. $v(10)=\frac{100}{11}m/s$

EX 15 :

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$; $x\in[-2,2]$

1.a) *la fonction* : $x\to 4-x^2$ *est continue et positive sur* $[-2,2]$ *d'où* f *est continue sur* $[-2,2]$

par suit f *admet au moins une primitive sur* $[-2,2]$

b)

$$\begin{cases} F'(x)=f(x) \\ F(0)=0 \end{cases}$$

$\forall x\in D_f=[-2,2]; (-x)\in D_F$

$f(x)=f(-x)\Rightarrow$

$F(x)=-F(-x)+k$

$F(0)=0\Rightarrow k=0$

d'où $F(-x)=-F(x)$

F est impaire.

2. $G(x)=F(2Cos\ x)$; $x\in[0,\pi]$

$\Rightarrow -\pi\le -x\le 0$

$\Rightarrow 0\le \pi-x\le \pi$

$\Rightarrow (\pi-x)\in D_G$

$G(\pi-x)=F(2Cos(\pi-x)$

$=F(-2Cos\ x)$

$=-F(2Cos\ x)$

$=-G(x)$

conclusion : $I(\frac{\pi}{2},0)$ *est un centre de symétrie pour la courbe de* f

b) $G'(x)=-2\sin x.F'(2Cos\ x)$

$=-2\sin x\ f(2Cos\ x)$

$=-2\sin x\sqrt{4(1-Cos^2 x)}$

$=-2\sin x\sqrt{4\sin^2 x}$

$=-4\sin x.|\sin x|$

$G'(x)=-4\sin^2 x$ (*car* $\sin x\ge 0$)

$G'(x)=-2(1-Cos\ 2x)$

d'où $G(x)=-2(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$G(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -2(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\pi$

d'où

$G(x)=-2x+\sin 2x+\pi$

$\forall x\in[0,\pi]$

c) $F(1)=F(2\cos(\frac{\pi}{3}))$

$=G(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F(2)=F(2\cos(0))$

$=G(0)=\pi$

$F(\sqrt{2})=F(2Cos\frac{\pi}{4})$

$=G(\frac{\pi}{4})=1+\frac{\pi}{2}$

EX 16 :

$u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

1. $u'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où

$\sqrt{1+x^2}=\frac{u(x)}{u'(x)}$

2. $f(x)=\dfrac{1}{u(x).\sqrt{1+x^2}}$

$f(x)=\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$

d'où

$F(x)=\dfrac{-1}{u(x)}$

$F(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=\dfrac{u^2(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=u^2(x).\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=u^2(x)\ \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$g(x)=u'(x)u(x)$

d'où

$G(x)=\dfrac{1}{2}u^2(x)$

$G(x)=\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{1+x^2})^2$

EX 17 :

$f(x)=x.Cos\ x$

$g(x)=x.\sin x$

1. $f'(x)+g(x)=Cosx-x\sin x+x\sin x$

$=Cos\ x$

d'où $g(x)=Cos\ x-f'(x)$

$G(x)=\sin x-(f(x))$

$G(x)=\sin x-x\ Cos\ x$

2. $g'(x)-f(x)=\sin x+x\ Cos\ x-f(x)$

$=\sin x$

d'où $f(x)=g'(x)-\sin x$

$F(x)=g(x)-Cos\ x$

$F(x)=x\sin x-Cos\ x$

EX 18 :

$n \geq 2$

$p_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$

1. $F_n(x) = x + x^2 + ... + x^n + k \quad k \in \mathbb{R}$

$F_n(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

d'où

$F_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$

2. *pour* $x \neq 1$

$$F_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(somme de (n+1) termes d'une suite géométrique de raison x)

$$F'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n.(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$F'_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

d'où $\begin{cases} p_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ p_n(1) = \dfrac{(n+1)}{2} \end{cases}$

EX 19 : $x \in [0, \pi]$

1. $g(x) = x.\sin x + Cos\ x - 1$

a) $g'(x) = \sin x + x\ Cos\ x - \sin x$

$g'(x) = x.Cos\ x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g'(x)	0	+	0	-	
g(x)	0	↗	$\frac{\pi}{2} - 1$	↘	-2

b) *g est continue sur* $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$

$g(\frac{2\pi}{3}).g(\pi) = -2(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}) < 0$

d'où l'équation g(x)=0 admet une solution $\alpha \in]\frac{2\pi}{3}, \pi[$

x	0		α		π
g(x)	0	+	0	-	

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - Cos\ x}{x} & \sin x \in]0, \pi] \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - Cos\ x}{x} = 0 = f(0)$

f est continue en droite en 0

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - Cos\ x}{x^2} = \frac{1}{2}$

f est dérivable à droite en 0 *et* $f'_d(0) = \frac{1}{2}$

$$b)\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

x	0	α	π
f'(x)	+	0	-
f(x)	0	$f(\alpha)$	$\frac{2}{\pi}$

$$c)\quad f(\alpha)=\frac{1-Cos\ x}{\alpha}$$

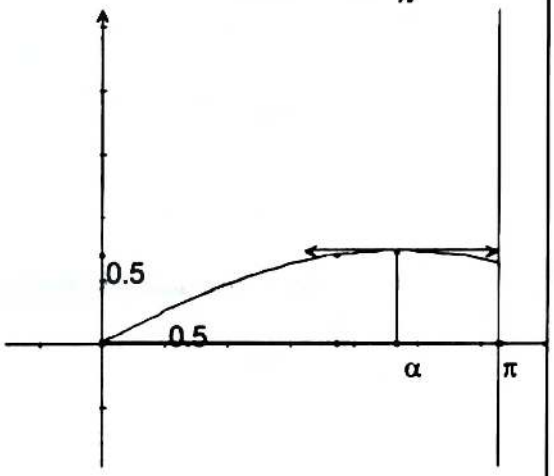
$g(\alpha)=0\Rightarrow \alpha.\sin\alpha+Cos\alpha-1=0$

$\Rightarrow Cos\ \alpha=1-\alpha.\sin\alpha$

d'où

$$f(\alpha)=\frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha}=\sin\alpha$$

3. $\alpha\simeq 2{,}34$; $f(\alpha)\simeq 0{,}72$; $\frac{2}{\pi}\simeq 0{,}61$



4. $k(x)=f(x)$ *pour* $x\in[\alpha,\pi]$

k est continue et strictemen décroissant $sur[\alpha,\pi]\Rightarrow$ *k est une bijéction de* $[\alpha,\pi]$ $sur\left[\frac{2}{\pi},f(\alpha)\right]=I$

5. $h(x)=g(x)-2\ Cos\ x \quad x\in[0,\pi]$

h est continue sur $[0,\pi]$ *d'où h admet des primitives sur* $[0,\pi]$

$h(x)=x.\sin x-Cos\ x-1$

$H(x)=-x.Cos\ x-x+k$

$H(0)=1\Rightarrow k=1$

d'où $H(x)=1-x-x.Cos\ x$

EX 20 :

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{cases}G'(x)=\varphi(x)\\ G(0)=0\end{cases}$$

1. $G'(-x)=\varphi(-x)=\varphi(x)$

$=G'(x)$

$G'(x)=G'(-x)$

$\Rightarrow G(x)=-G(-x)+k \quad k\in\mathbb{R}$

$G(0)=0\rightarrow k=0$

d'où $G(-x)=-G(x)$

G est impaire

2.*a*) $x\in\mathbb{R}^*$

$$\psi(x)=G(x)+G(\frac{1}{x})$$

ψ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$

$$\psi'(x)=G'(x)-\frac{1}{x^2}G'(\frac{1}{x})$$

$$=\varphi(x)-\frac{1}{x^2}.\varphi(\frac{1}{x})$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$=0$$

$\psi'(x)=0$

D'où ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ *et* $]0,+\infty[$

$\psi(1) = G(1) + G(1) = 2G(1)$

d'où

$\psi(x) = 2G(1)\ ; \forall x \in]0,+\infty[$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 2G(1)$

b) $u(t) = G(tg\ t)\ ;\ t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$u'(t) = (1+tg^2 t).G'(tg\ t)$

$= (1+tg^2 t)\ \varphi(tg\ t)$

$= (1+tg^2 t).\frac{1}{1+tg^2 t}$

$u'(t) = 1$

$u(t) = t + k\ ;\ (k \in \mathbb{R})$

$u(0) = G(tg\ 0) = G(0) = 0$

$\Rightarrow k = 0$

$u(t) = t\ ;\ \forall t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$G(1) = G(tg\ \frac{\pi}{4}) = u(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 2G(1) = \frac{\pi}{2}$

$G(x) = \psi(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} G(\frac{1}{x}) = G(0) = 0$

d'où $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \frac{\pi}{2}$

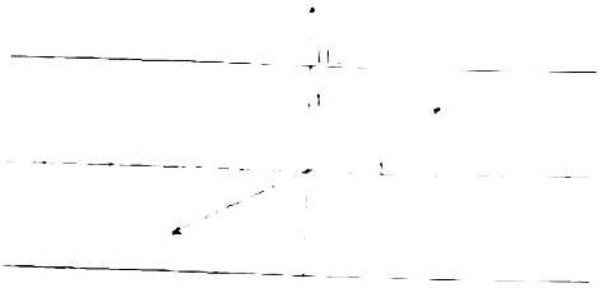
4. $G'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$

x	0	$+\infty$
G'(x)	+	
G(x)	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$

G est impaire.

$G'(0) = \frac{1}{2}$

O : centre de symétrie.



EX 21 :

$f(x) = \sqrt{1+Cos\ x}\ ;\ x \in [0,\pi]$

1.*a)* *f Est dérivable sur* $[0,\pi[$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+Cos\ x}} \le 0$

f est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ *elle réalise donc une bijection de* $[0,\pi]$ *sur*

$g([0,\pi]) = [g(\pi), g(0)] = \left[0, \sqrt{2}\right]$

b) *f est dérivable sur* $]0,\pi[$

et $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+Cos\ x}} \neq 0$

d'où f^{-1} *est dérivable sur*

$f(]0,\pi[) =]0,\sqrt{2}[$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad on\ pose: y=f^{-1}(x)$$

$$f(y)=x$$

$$=\frac{-2\sqrt{1+Cos\ y}}{\sin y}$$

$$f(y)=\sqrt{1+Cos\ y}=x$$

$$\Rightarrow 1+Cos\ y=x^2$$

$$\Rightarrow Cos\ y=x^2-1$$

$$\Rightarrow Cos^2 y=(x^2-1)^2$$

$$\Rightarrow -Cos^2 y=-1-x^4+2x^2$$

$$\Rightarrow 1-Cos^2 y=2x^2-x^4$$

$$\Rightarrow \sin^2 y=2x^2-x^4$$

$$\Rightarrow \sin y=\sqrt{2x^2-x^4}$$

d'où

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$\forall x\in\left]0,\sqrt{2}\right[$$

2. $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$

$$x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$$

$$\begin{cases}G'(x)=g(x)\\ G(0)=0\end{cases}$$

a) $\varphi(x)=G(x)+G(-x)$

$$\varphi'(x)=G'(x)-G'(-x)$$

$$=g(x)-g(-x)$$

$$=0$$

φ est constante sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

$$\varphi(0)=0$$

$$\varphi(x)=0,\ \forall x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$$

$$\Rightarrow G(x)+G(-x)=0$$

$$\Rightarrow G(-x)=-G(x)$$

G est impaire.

b) on a :

$$g(x)=-\left(f^{-1}\right)'(x)$$

$$\Rightarrow G(x)=-f^{-1}(x)+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$$

$$G(0)=-f^{-1}(0)+k$$

$$\Rightarrow 0=-\pi+k$$

$$\Rightarrow k=\pi$$

d'où

$$G(x)=\pi-f^{-1}(x)$$

$$G(1)=\pi-f^{-1}(1)$$

$$G(1)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

EX 22 :

$$\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=0\\ f'(x)=\dfrac{-2}{\pi.\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$$

1. $f'(x)<0\ ;\ \forall x\in\left]0,1\right[$

f est continue sur $[0,1]$ *et strictement décroissante*

$\Rightarrow$ *f réalise une bijective de* $[0,1]$ *sur*

$$f([0,1])=[f(1),f(0)]=[0,1]$$

2.*a) soit* $g(x)=f(Cos\ x)$

$$g'(x)=-\sin x\,.f'(Cos\ x)$$

$$=\frac{+2\sin x}{\pi\sqrt{1-Cos^2 x}}$$

$$=\frac{+2\sin x}{\pi.|\sin x|}$$

$$=\frac{2}{\pi} \quad car \quad \sin x>0$$

g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{2}{\pi}x+k \quad ; \ k\in\mathbb{R}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=1$

$\Rightarrow 1=1+k \Rightarrow k=0$

d'où $g(x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f(Cos\ x)=\frac{2}{\pi}x$

b) $f(Cos\ x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f^{-1}(\frac{2}{\pi}x)=Cos\ x$

soit $t=\frac{2}{\pi}x$

$x=\frac{\pi}{2}t$

d'où $f^{-1}(t)=Cos\ (\frac{\pi}{2}t)$

conclusion :

$f^{-1}(x)=Cos\ (\frac{\pi}{2}x) \ ; \ \forall x\in[0,1]$

3. $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(x)=f(Cos\ x)+f(\sin\ x)$

a) comme était composée et somme de fonctions dérivables

h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h(x)=f(Cos\ x)+f(Cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$=\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)$

$h(x)=1$

$h'(x)=-\sin\ x\ f'(Cos\ x)+Cos\ x\ f'(\sin\ x)$

$h'(x)=\frac{2\sin\ x}{\pi\sqrt{1-Cos^2x}}-\frac{2\sin\ x}{\pi\sqrt{1-\sin^2\ x}}$

$h'(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$

b) h continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h'(x)=0 \ ; \ \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

d'où h est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(0)=f(1)+f(0)=1$

d'où

$h(x)=1 \ ; \ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

4. $n\in\mathbb{N}^*$

$\varphi_n(x)=Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^n$

$x\in[0,1]$

a) $\varphi_n'(x)=\frac{-\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)-n\ x^{n-1}$

$\varphi_n'(x)\le 0 \ ; \ \forall x\in[0,1]$

φ_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur

$\varphi_n([0,1])=[-1,1]$ *et comme* $0\in[-1,1]$

alors il existe un uniqueréel

$a_n\in[0,1]$ *tq* : $\varphi_n(a_n)=0$

$\varphi_n(0).\varphi_n(1)<0\Rightarrow a_n\in\ ]0,1[$

b) $n - p > 0$ *alors*

$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^{n-p} < 1$

$\Rightarrow 0 < (x^{n-p}).x^p < x^p$

$\Rightarrow x^n < x^p$

$\Rightarrow -x^n > -x^p$

$\Rightarrow Cos(\frac{\pi}{2}x) - x^n > Cos(\frac{\pi}{2}x) - x^p$

$\Rightarrow \varphi_n(x) > \varphi_p(x)$

c) a_n *et* $a_{n-1} \in]0,1[$

d'après *b)* $n+1 > n$

d'où $\varphi_{n+1}(a_{n+1}) > \varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow 0 > \varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow \varphi_n(a_n) > \varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow a_n < a_{n+1}$

car φ_n *est strictement décroissante sur* $[0,1]$

d'où (a_n)*est strictement décroissante*

et comme on a $a_n > 0$

(a_n) *est décroissante et* min *orée par* 0

elle est donc convergente.